CPI2-UM6P — Analyse 3 — Prof : Taha EL BAKKALI EL KADI

TD N°3 : Les espaces vectoriels normés

Exercice 1

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que l'application : $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n[X], \quad A \longmapsto \chi_A$ qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue.
2. Montrer qu'en revanche l'application : $\Pi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n[X], \quad A \longmapsto \pi_A$ qui à une matrice associe son polynôme minimal n'est pas continue.

Exercice 2

Dans cet exercice, on veut montrer que si A est une partie compacte de E alors A est $BL-$compact de E. Supposons que A est une partie compacte de E et soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de A.

1. Montrer que A est précompact (c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ.
2. Montrer que :
$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \exists i \in I,\ B(x, \alpha) \subset O_i.$$
Indication : dans le cas contraire, on pourra construire une suite de boules $B(x_n, \varepsilon_n)$ telles que (x_n) converge vers a, $\varepsilon_n \to 0$, et $B(x_n, \varepsilon_n) \not\subset O_i$ pour tout i. Trouver une contradiction en considérant une certaine boule centrée en a.
3. Déduire que A est BL-compact de E.

Exercice 3

On souhaite démontrer le théorème de Riesz. Celui-ci affirme qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

1. Justifier le sens « facile » du théorème.
2. Réciproquement, supposons que E soit un espace vectoriel normé de dimension infinie, et montrons que sa boule unité fermée $B_f(0,1)$ n'est pas compacte.
   (a) Soit F un sous-espace de E de dimension finie et $x \in E \setminus F$.
      (i) Justifier l'existence de $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x - y\|$.
      (ii) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire u vérifiant :
$$d(u,F) = 1.$$
   (b) Conclure alors en construisant une suite d'éléments de $B_f(0,1)$ ne possédant pas de valeur d'adhérence.

Exercice 4

1. (a) Soient K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrer qu'il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que
$$d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2).$$
   (b) Soient $K \subset E$ un compact et $F \subset E$ un fermé tels que $K \cap F = \varnothing$. Montrer que $d(K, F) > 0$. *Ce résultat subsiste-t-il si K est seulement supposé fermé ?*
2. Soit $E = \mathbb{R}^d$.
   (a) Soit $F \subset E$ un fermé et $f : F \to \mathbb{R}$ une application continue telle que
$$\lim_{\substack{x \in F \\ \|x\| \to \infty}} f(x) = +\infty.$$
   Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que
$$f(y) = \inf_{x \in F} f(x).$$
   (b) Soient $K \subset E$ un compact et $F \subset E$ un fermé. Montrer qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que
$$d(x, y) = d(K, F).$$
   NB : Ce résultat n'est pas toujours vrai si E est un espace vectoriel normé réel de dimension infinie.

Exercice 5

1. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par :
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \int_0^1 |f(t)|\, dt$$
   Montrer que que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
2. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ muni de la norme définie par :
$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
   Démontrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de banach.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires :
$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$
Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach

Exercice 7

On considère l'espace vectoriel normé $(C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ et l'application

$$\varphi : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]), \qquad \varphi(f)(x) = \tfrac{1}{5}\int_0^x (f(t))^3\,dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie et que φ est continue.
2. Montrer que si B est la boule unité fermée de $C([0,1])$ alors $\varphi(B) \subseteq B$.
3. Montrer qu'il existe un unique $f_0 \in B$ telle que $\varphi(f_0) = f_0$.

Exercice 8

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Montrez que les composantes connexes par arcs de O sont des intervalles ouverts.
2. En déduire que O est réunion au plus dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.

Exercice 9

1. Montrer que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de complexes est une partie connexe par arcs.
2. Établir que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une partie connexe par arcs.

   On pourra considérer l'application

$$z \longmapsto \det\big((1-z)A + zB\big) \quad \text{pour } A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$